数　学　Ⅰ

第１章　方程式と不等式

Section　2　　整式の乗法

2012 年 02 月 08 日初版作成

2012 年 03 月 04 日問題追加

Web数学研究室

第１章　Section 2　整式の乗法

例題　2-1　基本　乗法公式２乗のパターン

次の式を展開しなさい。

(1)　$(2x-5y)^2$　　(2)　$(3x+y)^2$　　(3)　$(5x+2y)(5x-2y)$

(4)　$(x+4)(x-3)$　　(5)　$(x+2y-3z)^2$

問題の考え方

2 乗の乗法公式は基本的には６本ある。参考書には、$(a+b)^2$ という感じで小文字を使って書かれているが、私は大文字を使って $(A+B)^2$ と覚えた方が良いと思う。理由は問題文では小文字で出題されるため、問題文の文字と公式の文字と区別出来なくなることがあるからである。

また、乗法公式は公式の全体像を見る感じ、 形で覚える事 が大切である。その使い方を以下に示す。

解答と解説

$(2x-5y)^2$ の展開をするとき、公式も一緒に覚える方法として、問題の上に該当する公式を書いて、展開を考えていくという方法が適切である。

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

$(2x-5y)^2 =$ 　上の式を見ながら、Aは $2x$ 、Bは $5y$ という感じで、代入する。

↑

どの公式も、 規則的な文字の並び になるので、**式の形で覚える**こと。

頭の中でイメージする

$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$
$(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2$

という感じで上下に並べてノートに書くと良い。

(1) 　$(2x-5y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(5y) + (5y)^2$

$= 4x^2 - 20xy + 25y^2$ 答

Technique

公式の覚え方として、＋のパターンのみを覚えて、－の場合には　－Bを＋(－B)　とする方法もあるので紹介する。

例　$(\mathrm{A}-\mathrm{B})^2$　の場合は

$$(\mathrm{A}+(-\mathrm{B}))^2=\mathrm{A}^2+2\mathrm{A}(-\mathrm{B})+(-\mathrm{B})^2$$　として、＋のパターンの公式を使う。

この方法は３乗でも使えるうえ、覚える公式の本数を減らすことも出来る。

(2)　$(3x+y)^2=(3x)^2+2(3x)(y)+y^2$

$$=9x^2+6xy+y^2$$ 答

(3)　$(5x+2y)(5x-2y)=(5x)^2-(2y)^2$

$$=25x^2-4y^2$$ 答

(4)　$(x+4)(x-3)=x^2+(4-3)x+4\cdot(-3)$

$$=x^2+x-12$$ 答

(5)　$(x+2y-3z)^2=x^2+(2y)^2+(-3z)^2+2x(2y)+2x(-3z)+2(2y)(-3z)$

$$=x^2+4y^2+9z^2+4xy-6xz-12yz$$ 答

例題がきちんと理解できているのかを確認するためもう一度解いてみましょう。

では、練習問題に進みます。

Let's Challenge 2 - 1

次の式を展開しなさい。

① $(5x+2y)^2$　　② $(3x-y)(2x+y)$

③ $(2a-5b)(2a+5b)$　　④ $(a-b+3c)^2$

この問題の解答を見る

例題 2-2 標準 乗法公式３乗のパターン

次の式を展開しなさい。

(1) $(x+3y)^3$

(2) $(3x-2y)^3$

(3) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$

(4) $(3x-4)(9x^2+12x+16)$

問題の考え方

３乗の乗法公式は基本的には４本ある。覚え方は２乗の場合と同じである。
全体像を見る感じで 形で覚える事 が大切である。
$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$ のように２項×３項のパターンは公式が使えるかを素早く確認する。方法は、２項のそれぞれの２乗が３項の両端と等しい かを見る。

解答と解説

(1)　A $=x$　B = 3y　として、３乗の公式に代入する。

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^3=\mathrm{A}^3+3\mathrm{A}^2\mathrm{B}+3\mathrm{A}\mathrm{B}^2+\mathrm{B}^3$$

$$(x+3y)^3=(x)^3+3x^2(3y)+3x(3y)^2+(3y)^3$$ となる。

$$=\underline{x^3+9x^2y+27xy+27y^2}$$ 答

(2)　A = $3x$　B = $-2y$　として、３乗の公式に代入する。

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^3=\mathrm{A}^3+3\mathrm{A}^2\mathrm{B}+3\mathrm{A}\mathrm{B}^2+\mathrm{B}^3$$

$$(3x+(-2y))^3=(3x)^3+3(3x)^2(-2y)+3(3x)(-2y)^2+(-2y)^3$$

$$=27x^3-54x^2y+36xy^2-8y^3$$ 答

(3)

Technique

$$(x+2y)(x^2\boxed{-2xy}+4y^2)$$

まず、　ここの関係を見る。

・２乗になっていなければ、公式は使えない。

・次に　３項の真ん中の項　が、２項の積（符号逆）になっている。

今回は公式

(A＋B)(A^2－AB＋B^2)＝A^3＋B^3　が使えるので

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=x^3+(2y)^3$$

$$=x^3+8y^3$$ 答

(4)　２項×３項のパターンで（3）同様は公式が使える事を確認する。

$$(3x-4)(9x^2+12x+16)=(3x)^3+(-4)^3$$

$$=27x^3-64$$ 答

例題がきちんと理解できているのかを確認するためもう一度解いてみましょう。

では、練習問題に進みます。

Let's Challenge 2-2

次の式を展開しなさい。

① $(3x+y)^3$　　② $(-2a+5b)^3$

③ $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2)$　　④ $(a-4b)(a^2+5ab+4b^2)$

③と④は、迷わず公式使用の有無を判断できなければならない

入試では、迅速な判断・計算スピードが要求される

<u>この問題の解答を見る</u>

例題 2-3　標準　公式を応用するパターン

この式を展開しなさい。

(1)　$(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$　　(2)　$(a+b+c)(a+b-c)$

問題の考え方

(1) (2項)×(3項)が出てきたら、例題 2-2 の **Technique** の関係を見る。

今回は公式が使える事が分かる。

(2) (3項)×(3項)で直接公式は使えない。その場合は、工夫することにより公式が利用できないかと考えることが大切である。

解答と解説

(1)　$\mathrm{A}=a^2$　$\mathrm{B}=b^2$　として、３乗の公式に代入する。

$(\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}^2-\mathrm{AB}+\mathrm{B}^2)=\mathrm{A}^3+\mathrm{B}^3$　より

与式$=(a^2)^3+(b^2)^3$　→　ここで指数法則を説明する

★指数法則はまず、この２つを覚える

（ｉ）　$(a^{\boxed{n})\ m})$ ＝　$a^{\boxed{n\times m}}$ → $\boxed{}$ の中が　n × m

（ii）　$a^{\boxed{n}}\times a^{\boxed{m}}$ ＝　$a^{\boxed{n+m}}$ → $\boxed{}$ の中が　n ＋ m

今回の計算は（ｉ）のパターンなので、　$(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6$　となる。

与式＝　$(a^2)^3+(b^2)^3 =$　a^6+b^6 答

(2) 公式を使う工夫として　A＝$a+b$ とおく。

そうすると式は

与式＝（A－c）（A＋c）　となり差と和の積の公式が使えるようになる。

与式＝$(a+b+c)(a+b-c) = \{(a+b)^2 - c^2\}$

$= a^2+b^2-c^2+2ab$ 答

例題がきちんと理解できているのかを確認するためもう一度解いてみましょう。

では、練習問題に進みます。

Let's Challenge　2-3

次の式を展開しなさい。

① $(a-1)^2(a+1)^2$　② $(x^2-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

③ $(x+y+1)(x-y-1)$

この問題の解答を見る

以上で、第１章　Section ２　整式の乗法　は終了です。勉強お疲れ様でした。

最後に、Section２の「**検定試験**」を受けてください。

下記のリンクで　私のＨＰ内　実力テストのサイト　へ飛びます。

セキュリティ警告が出る場合は「許可」で大丈夫です。テストを開始するといきなり

制限時間５分で始まります、頑張ってください。

第１章　Section２　「検定試験」

http://www1.ncv.ne.jp/~yoshi/test1/65s24c-test2.html

Challenge ２-１ の 解説

① $(5x+2y)^2 = (5x)^2 + 2(5x)(2y) + (2y)^2$

$= \boxed{25x^2 + 20xy + 4y^2}$

② $(3x-y)(2x+y) = (3x)(2x) + (3x-2x)y - y^2$

$= \boxed{6x^2 + xy - y^2}$

③ $(2a-5b)(2a+5b) = (2a)^2 - (5b)^2$

$= \boxed{4a^2 - 25b^2}$

④ $(a-b+3c)^2 = a^2 + (-b)^2 + (3c)^2 + 2a(-b) + 2a(3c) + 2(-b)(3c)$

$= \boxed{a^2 + b^2 + 9c^2 - 2ab + 6ac - 6bc}$

元のページに戻る

Challenge　2 - 2 の 解説

① $(3x+y)^3 = (3x)^3 + 3(3x)^2 y + 3(3x)y^2 + y^3 = \boxed{27x^3 + 27x^2y + 9xy^2 + y^3}$

② $(-2a+5b)^3 = (-2a)^3 + 3(-2a)^2 5b + 3(-2a)(5b)^2 + (5b)^3$

$= \boxed{-8a^3 + 60a^2b - 30ab^2 - 125b^3}$

③ $(a+3b)(a^2-3ab+9b^2) = (a)^3 + (3b)^3 = \boxed{a^3 + 27b^3}$

④ $(a-4b)(a^2+5ab+4b^2) = a(a^2+5ab+4b^2) - 4b(a^2+5ab+4b^2)$

・２乗になっていないので、公式は使えない → 普通に展開する。

$= a^3 + 5a^2b + 4ab^2 - 4a^2b - 20ab^2 - 16b^3$

$= a^3 \boxed{+5a^2b} \boxed{+4ab^2} \boxed{-4a^2b} \boxed{-20ab^2} - 16b^3$

同類項を整理する

$= \boxed{a^3 + a^2b - 16ab^2 - 16b^3}$

元のページに戻る

Challenge　2 - 3 の 解説

どの展開も工夫することにより簡単になる問題である。

① $(a-1)^2(a+1)^2 = \{(a-1)(a+1)\}^2 = (a^2-1)^2 = \boxed{a^4-2a^2+1}$

② $(x^2-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1) = (x-1)(x^2-x+1)(x+1)(x^2+x+1)$

$(x^2$-1)を(x-1)(x+1)と因数分解し、乗法公式が使える形にし、展開する

$= (x^3-1)(x^3+1)$

$= \boxed{x^6-1}$

③ $(x+y+1)(x-y-1) = \{x+(y+1)\}\{x-(y+1)\} = x^2-(y+1)^2$

を使用する公式　$(A+B)(A-B)=A^2-B^2$

$= \boxed{x^2-y^2-2y-1}$

元のページに戻る