数 学 Ⅰ

第１章　方程式と不等式

Section　3　　因数分解

2012 年 03 月 30 日初版作成

Web数学研究室

第１章 Section ３ 因数分解

★因数分解は、ここを覚える

項の数を見て、素早くその解き方判断する。

２項・・・公式使用、多くは　３乗のパターン

３項・・・多くは　たすき掛け。たまに解の公式利用する

４項・・・多くは　２項ずつの組合せ、たまに３項と１項で２乗差

５項以上・多くは　式のたすき掛け

用語解説　因数分解・・１つの式をいくつかの式の積の形に表す事、この積を作っている式を因数という。

よく参考書でみる、因数分解の手順

① 共通因数でくくる

② 公式を適用する

③ 文字が２つ以上ある場合には１つの文字について整理する

しかし、実践的にはこの手順は使いにくく、私は上の ここを覚える の 枠内の要領 を使った方法で教えている。

例題 3-1 標準 2項タイプ

次の式を因数分解しなさい。

(1) $a^3 + 8b^3$　　　(2) $a^6 - b^6$

問題の考え方

2項タイプの因数分解は、2乗にせよ3乗にせよ、共通因数があればくくり公式を使うものがほとんどである。

解答と解説

(1) A $= a$　B $= 2b$　として、3乗の公式に代入する。

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$$ より

$$a^3 + 8b^3 = (a+2b)\{a^2 - a(2b) + (2b)^2\}$$

$$= (a+2b)(a^2 - 2ab + 4b^2)$$ 答

(2) $a^6 - b^6$ については、6乗を $(a^3)^2 - (b^3)^2$ と考えるとよい。

$$a^6 - b^6 = (a^3)^2 - (b^3)^2$$

$$= (a^3 - b^3)(a^3 + b^3)$$

$$= (a-b)(a^2 + ab + b^2)(a+b)(a^2 - ab + b^2)$$ 答

例題 3-2 標準 3項タイプ

次の式を因数分解しなさい。

(1) $65x^2-112x+48$ (2) $(a^2-a)^2-14(a^2-a)+24$

問題の考え方

3項タイプの因数分解は、まずたすき掛けよる方法で考える。

(1) 65と48のようにたすき掛けを考える数が大きいときには、試しに真ん中あたりの数を組合せ、「当たりを付ける」計算をするとよい。

(1) は式全体を見て、(a^2-a)のが重複して出てきているので、ここを一文字で置き換えると分かり易くなる。

用語解説　当たりを付ける・・・(数学用語ではないですが)おおよその状態を探るため見当をつけること。
まあ、試しにこの位でやってみるか、的な感じ。

解答と解説

(1)　まず、組合せが沢山ありそうな因数分解は、何度か計算が必要になると思うが、

$65 = 5 \times 13$　　$48 = 8 \times 6$　でやってみる。

$65x^2 - 112x + 48$

5　　8 → **104**

13　　6 → **30**

134　実際は -112　である必要があるからここで再考する。

Technique　再考のイメージ

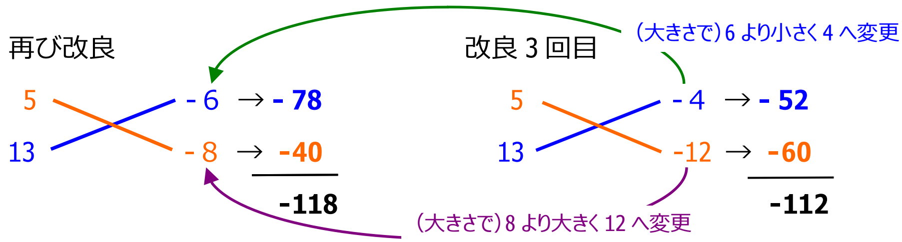
134 と-112 を比べて、負の数にしなければならない。

と言うことは、48の積の８と６の部分には－（マイナス）が付く。

たすき掛け後の和をもう少し小さくする必要があるから、

ここ大切 →13にかける数を小さく、５にかける数を大きくしなければならない。

大きな数 13 にかける数を、8 より小さくし、小さな数 5 にかける数を、6 より大きくすると、全体の和が 134 より減り 112 に近づく。(マイナスを考えないとする)



今度は一致した

★係数が大きな数のたすき掛けにこの **Technique** を使いましょう。

$$65x^2 - 112x + 48 = \underline{(5x-4)(13x-12)}$$ 答

(2)

$(a^2 - a)$ を A と置いて式を書き直す。

$(a^2-a)^2 - 14(a^2-a)+24 = A^2 - 14A + 24$ ……▶ さらに因数分解する

$= (A-12)(A-2)$ ……▶ A を戻す

$= (a^2 - a - 12)(a^2 - a - 2)$

$= \underline{(a-4)(a+3)(a-2)(a+1)}$ 答

例題 3-3 標準 ４項タイプ

次の式を因数分解しなさい。

(1) $x^3+x^2z-xy^2-y^2z$　　(2) $4ab^2-a+2b+1$

問題の考え方

４項タイプの因数分解は、２項ずつを組みして因数を作っていく問題が多い。

３項と１項の組合せやその他のケースもあるが、まず２項の組みを作ることを先に考えたい。組にする場合は、最も次数の低い文字に注目して分けると良い。

解答と解説

(1) 最も次数の低い文字が z であるので、z について整理し２項ずつの組みで共通因数が作れるかを考えることが先決である。

$$x^3+x^2z-xy^2-y^2z$$

$= x^3-xy^2 + x^2z-y^2z$ ⇢ z の 有る無し で分ける

$= x(x^2-y^2) + z(x^2-y^2)$ ⇢ 共通因数を見つける

$= (x^2-y^2)(x+z)$

$= (x-y)(x+y)(x+z)$ 答

(2)　これも（1）同様、最も次数の低い文字が a であるので、a について整理し
2 項ずつの組みで共通因数が作れるかを考えることが先決である。

$$4ab^2 - a + 2b + 1$$

$= a(4b^2 - 1) + (2b+1)$ ⋯⋯▶ $4b^2 - 1$ を因数分解すると $2b+1$ が作られ
これが共通因数となることに気付く

$= a\,(2b+1)\,(2b-1) + (2b+1)$

$= (2b+1)\,\{\,a\,(2b-1) + 1\,\}$ ⋯⋯▶ { }の中を展開して整理する

$= (2b+1)\,(2ab - a + 1)$ 答

例題 3-4 標準 5項以上タイプ

次の式を因数分解しなさい。

(1) $2x^2 + xy - x - 2y - 6$ (2) $x^2 + xy - 2y^2 - 3x - 3y + 2$

問題の考え方

5項以上タイプの因数分解は、全体を1つの文字について降べきの順に整理し、2次式を作り、多項式のたすき掛けをするケースが多い。その例として2問、例題を説明する。

解答と解説

(1) x について降べきの順に整理する。

$$2x^2 + xy - x - 2y - 6 = 2x^2 + (\boldsymbol{y-1})x - (2y + 6)$$

ここがたすき掛け

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -2 & \rightarrow & \boldsymbol{-4} \\ 2 & & y+3 & \rightarrow & \boldsymbol{y+3} \\ \hline & & & & \boldsymbol{y-1} \end{array}$$

$= (x-4)(2x+y+3)$ 答

(2)　x について降べきの順に整理する。

$$x^2+xy-3x-2y^2-3y+2=x^2+(y-3)x-\boxed{(2y^2+3y-2)}$$

ここの部分を先に因数分解する

$$=x^2+(y-3)x-(y+2)(2y-1)$$

ここがたすき掛け

$$\begin{array}{lclcl} 1 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -(y+2) & \rightarrow & -y-2 \\ 1 & & (2y-1) & \rightarrow & 2y-1 \\ \hline & & & & y-3 \end{array}$$

$$=(x-y-2)(x+2y-1)$$ 答

例題 3-5　標準 ～ 応用　その他のタイプ

次の式を因数分解しなさい。

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$　　(2)　$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$

問題の考え方

どちらも最初は展開から入るが、

(1) は両端と中 2 つの (　) を 2 個ずつ組み合わせ「x^2+5x」の項を作っていく。
　ここを A で置き換えると A の 2 次式ができる。

(2) は展開して 1 つの文字について、(例えば x) 整理して因数分解を進める。

解答と解説

(1)　$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$　のように(　)が 4 個並ぶ式は両端と中 2 つを組みにしてかけると同じ部分が出来る。

両端

この部分 = $(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)$

ここをAで置き換える

与式 = $(A+4)(A+6)-24$

$$
\begin{aligned}
&= A^2+10A \\
&= (x^2+5x)(x^2+5x+10) \\
&= x(x+5)(x^2+5x+10)
\end{aligned}
$$
答

(2)

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz \quad = \quad x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+3xyz$$

$\cdots\cdots\blacktriangleright$ まずは全体を展開した

$$= x^2(y+z)+x(\boxed{y^2+z^2+3yz})+yz(y+z)$$

$\cdots\cdots\blacktriangleright$ x の降べきの順に整理した

ここで全体的に(y+z)の項がありそうと気付けるかで決まる

特にここの変形で　$y^2+z^2+3yz=(y+z)^2+yz$　とし　$(y+z)$　を作ることがポイントである

ここで　$(y+z)$　を　A　と置いて式全体を書き直すと下の様になる

$$= x^2\mathrm{A}+x(\mathrm{A}^2+yz)+yz\mathrm{A}$$

$\cdots\cdots\blacktriangleright$ ３項なのでたすき掛けをする

ここがたすき掛け

$$\begin{array}{ccccc} 1 & & \mathrm{A} & \longrightarrow & \mathrm{A}^2 \\ \mathrm{A} & & yz & \longrightarrow & yz \\ \hline & & & & \mathrm{A}^2+yz \end{array}$$

$$=(x+\mathrm{A})(\mathrm{A}x+yz)$$

$$=(x+y+z)(xy+xz+yz)$$ 答